PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE 2026
SPÉCIAL 15 ANS
NIVEAU SCOLAIRE

NOUAKCHOTT, SAMEDI 31 JANVIER 2026
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

Aucun document n'est autorisé. Les appareils électroniques sont interdits.
Le jury portera une attention toute particulière à la qualité de la rédaction (clarté, précision, concision, voire élégance).
Les trois exercices sont indépendants.
Les candidats peuvent les traiter dans l'ordre qu'ils souhaitent.

Exercice 1 (i) Montrer qu'il existe un polynôme du second degré à coefficients réels P tel que, pour tout $x \in [-1, 1]$, on ait

$$\big|P(x) - |x|\big| \leq \frac{1}{8}.$$

(ii) Peut-on remplacer $1/8$ par un réel $u < 1/8$.

Exercice 2 Dans tout cet exercice, m est un entier quelconque au moins égal à 2, fixé une fois pour toute.

On appelle *jolie suite* toute suite finie d'entiers de la forme $(u_i)_{1 \leq i \leq l}$ telle que :

— pour tout i entre 1 et l : $|u_i| \leq m$,

— $\sum_{i=1}^{l} u_i = 0$, et

— quel que soit E sous-ensemble non vide de $\{1, \ldots, l\}$ différent de $\{1, \ldots, l\}$, on a $\sum_{i \in E} u_i \neq 0$.

L'entier l est appelé *longueur* de la suite.

(i) Fabriquer une jolie suite de longueur $2m - 1$.

(ii) Si $(u_i)_{1 \leq i \leq l}$ est une jolie suite de longueur $l \geq 3$, montrer qu'il est possible de trouver une permutation σ de $\{1, \ldots, l\}$ telle que pour tout entier k entre 1 et l :

$$-(m-1) \leq \sum_{i=1}^{k} u_{\sigma(i)} \leq m - 1.$$

(iii) Démontrer que

$$\sup\{l \in \mathbb{N} \text{ tel qu'il existe une jolie suite de longueur } l\} = 2m - 1.$$

Exercice 3 (i) Trouver toutes les solutions entières et positives $(l, m, n) \in (\mathbb{N}^*)^3, l < m < n$ à l'équation
$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geq 1.$$

On appelle *diviseur propre* d'un entier $m \geq 1$, un diviseur de m strictement positif et différent de m lui-même. Ainsi, $1, 2$ et 3 sont les trois diviseurs propres de 6 tandis que si p est un nombre premier, il n'admet qu'un seul diviseur propre, à savoir 1.

(ii) À quelle condition sur sa factorisation, un entier admet-il au moins trois diviseurs propres ?

On pose

$$\mathcal{T} = \{n \in \mathbb{N} \text{ tels que } n \text{ admet au moins trois diviseurs propres}\}.$$

Pour $n \in \mathcal{T}$, on définit $\Delta(n)$ comme la somme des trois plus grands diviseurs propres de n. Ainsi par exemple, $\Delta(28) = 14 + 7 + 4 = 25$.

(iii) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathcal{T}$, impair, on ait $\Delta(m) \leq cm$. Quelle est la plus petite constante c pour laquelle cette inégalité est vérifiée ?

(iv) Résoudre, en $n \in \mathbb{N}$, les deux équations $\Delta(n) = n$ et $\Delta(n) > n$.

On considère maintenant les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leur premier terme $a_0 \in \mathcal{T}$ et la formule de récurrence $a_{n+1} = \Delta(a_n)$. On dira que c'est la *suite issue de* a_0. S'il existe un entier k tel que $a_k \notin \mathcal{T}$, on dit que la suite *s'arrête*.

(v) Trouver tous les entiers n tels que la suite issue de $a_0 = n$ ne s'arrête pas.