PRIX YAHYA OULD HAMIDOUNE 2026
SPÉCIAL 15 ANS
NIVEAU UNIVERSITAIRE
NOUAKCHOTT, SAMEDI 31 JANVIER 2026
DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES

Aucun document n'est autorisé. Les appareils électroniques sont interdits.
Le jury portera une attention toute particulière à la qualité de la rédaction
(clarté, précision, concision, voire élégance).
Les quatre exercices sont indépendants.
Les candidats peuvent les traiter dans l'ordre qu'ils souhaitent.

Exercice 1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit $u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs de classe C^1. On suppose que, pour tout $x \in \Omega$, il existe $\tau(x) > 0$ tel que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Phi_t(x) = u(\Phi_t(x)), \\ \Phi_0(x) = x, \end{cases}$$

admet une unique solution sur $(-\tau(x), \tau(x))$ à valeurs dans Ω. On note (Φ_t) le flot correspondant (défini pour $|t|$ assez petit), et $D\Phi_t(x)$ sa matrice jacobienne par rapport à la variable initiale x.

On dit que le flot préserve le volume si, pour tout ouvert $U \subset \Omega$ relativement compact et pour tout t tel que Φ_t soit un C^1-difféomorphisme de U sur $\Phi_t(U)$ et $\Phi_t(U) \subset \Omega$, on a

$$|\Phi_t(U)| = |U|,$$

où $|\cdot|$ désigne la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$. On pourra utiliser (et justifier) que, sous ces hypothèses, la formule de changement de variables permet ensuite d'obtenir la même identité pour tout ensemble mesurable $E \subset U$.

(i) Montrer que, pour $|t|$ assez petit, l'application Φ_t est de classe C^1 en x et que $x \mapsto D\Phi_t(x)$ est continue. Montrer aussi que $D\Phi_0(x) = I_n$.

(ii) Fixer $x \in \Omega$ et poser $A(t) = D\Phi_t(x) \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A vérifie l'équation différentielle matricielle

$$A'(t) = Du(\Phi_t(x))\, A(t), \qquad A(0) = I_n.$$

(iii) Soit $A(t)$ une matrice inversible de classe C^1. Montrer la formule

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \operatorname{tr}\bigl(A(t)^{-1} A'(t)\bigr).$$

(iv) En appliquant la question précédente à $A(t) = D\Phi_t(x)$, démontrer que

$$\frac{d}{dt} \det(D\Phi_t(x)) = (\operatorname{div} u)(\Phi_t(x))\ \det(D\Phi_t(x)).$$

En déduire la formule

$$\det(D\Phi_t(x)) = \exp\left(\int_0^t (\operatorname{div} u)(\Phi_s(x))\, ds \right).$$

(v) Rappeler (et justifier dans ce cadre) la formule de changement de variables suivante : si $U \subset \Omega$ est un ouvert relativement compact et si Φ_t est un C^1-difféomorphisme de U sur $\Phi_t(U)$, alors, pour tout ensemble mesurable $E \subset U$,

$$|\Phi_t(E)| = \int_E \bigl|\det(D\Phi_t(x))\bigr|\, dx.$$

Expliquer pourquoi, pour $|t|$ assez petit, on peut écrire cette formule sans valeur absolue.

(vi) Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) le flot (Φ_t) préserve le volume ; (b) $\operatorname{div} u \equiv 0$ dans Ω.

Exercice 2 Soit Γ une courbe fermée, simple, orientée positivement, de classe C^1 par morceaux, et soit Ω le domaine borné dont le bord est Γ. Soit f une fonction méromorphe sur un voisinage de $\overline{\Omega}$. On suppose que f n'a ni zéro ni pôle sur Γ. On note $N_\Omega(f)$ le nombre de zéros de f dans Ω comptés avec multiplicité, et $P_\Omega(f)$ le nombre de pôles de f dans Ω comptés avec multiplicité.

Démontrer la formule

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N_\Omega(f) - P_\Omega(f).$$

(i) Soit $a \in \Omega$ un zéro de f d'ordre $m \geq 1$. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe h au voisinage de a, avec $h(a) \neq 0$, telle que $f(z) = (z-a)^m h(z)$, puis calculer $\mathrm{Res}\Big(\frac{f'}{f}, a\Big)$.

(ii) Soit $b \in \Omega$ un pôle de f d'ordre $m \geq 1$. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe k au voisinage de b, avec $k(b) \neq 0$, telle que $f(z) = (z-b)^{-m} k(z)$, puis calculer $\mathrm{Res}\Big(\frac{f'}{f}, b\Big)$.

(iii) Montrer que les pôles de $\frac{f'}{f}$ dans Ω sont exactement les zéros et les pôles de f, et exprimer la somme des résidus de $\frac{f'}{f}$ dans Ω en fonction de $N_\Omega(f)$ et $P_\Omega(f)$.

(iv) Conclure en appliquant le théorème des résidus à la fonction $\frac{f'}{f}$ sur Ω.

Exercice 3 Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n. Montrer l'équivalence entre :

(i) la seule valeur propre de A est 1 (avec multiplicité algébrique n) ;

(ii) pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $\mathrm{tr}(A^k) = n$.

Exercice 4 Dans tout l'exercice, K désigne un corps commutatif et $M_n(K)$ l'algèbre des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans K.

(i) Soit $A \in M_n(K)$. On définit le polynôme caractéristique de A par

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) \in K[X].$$

À l'aide de cette définition, montrer que χ_A est un polynôme unitaire de degré n, et que le coefficient de X^{n-1} dans $\chi_A(X)$ vaut $-\mathrm{tr}(A)$.

(ii) Montrer que $\chi_A(A) = 0$ dans $M_n(K)$.

On pourra considérer la matrice $XI_n - A$ à coefficients dans l'anneau $K[X]$ et son adjointe $\mathrm{adj}(XI_n - A)$, et utiliser l'identité

$$(XI_n - A)\,\mathrm{adj}(XI_n - A) = \det(XI_n - A)\,I_n.$$

(iii) Montrer qu'il existe des polynômes $q, r \in K[X]$ tels que $\deg r \leq n-1$ et

$$X^m = q(X)\chi_A(X) + r(X) \qquad (m \geq n),$$

puis en déduire que

$$A^m = r(A) \qquad \text{pour tout } m \geq n.$$

(iv) On suppose maintenant $n = 2$. Montrer que

$$\chi_A(X) = X^2 - \operatorname{tr}(A)\, X + \det(A),$$

et en déduire l'identité de Cayley–Hamilton

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)\, A + \det(A)\, I_2 = 0.$$

En déduire aussi que si $\operatorname{tr}(A) = 0$ alors $A^2 = -\det(A)\, I_2$.

(v) Soient $A, B \in M_2(K)$ tels que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ et

$$A^2 B = B A^2.$$

Montrer que A et B commutent, c'est-à-dire $AB = BA$.

(vi) Montrer que l'hypothèse $\operatorname{tr}(A) \neq 0$ de la question précédente est nécessaire en général en donnant un contre-exemple avec $\operatorname{tr}(A) = 0$.